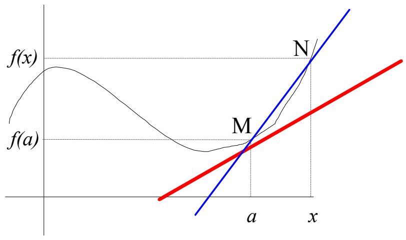
مستوى الدراسي: الأولى علوم تجريبية عدد الساعات : 10	درس الاشتقاق	الثانوية التأهيلية: وادي الذهب الأستاذ : رشيد بلمو

I. قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

نشاط : نعتبر الدالتين f و g المعرفتين كالتالي : $f(x)=3x^2$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$

أحسب النهايات التالية: 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ و 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

1. العدد المشتق



تعريف : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$$

يسمى العدد المشتق للدالة في النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'(a)$

ونكتب : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

ملاحظة : الكتابة : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ تكافئ الكتابة : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

2. التأويل الهندسي للعدد المشتق – معادلة مماس لمنحنى دالة في نقطة

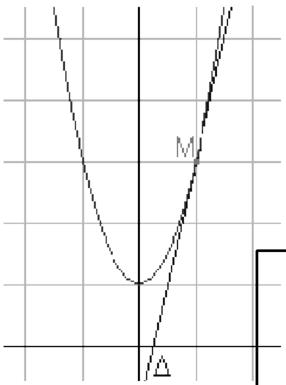
تعريف : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a و (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

المستقيم (Δ) المار من النقطة $M(a;f(a))$

و الذي معامله الموجه هو $f'(a)$ يسمى المماس للمنحنى (C_f) في النقطة M

خاصية : لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a. معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) في النقطة $M(a;f(a))$. هي :

$$(\Delta)\ :\ y=f(a)+f'(a)(x-a)$$



مثال: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^2-2x+1$

1. باستعمال التعريف بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=2$.
2. حدد معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند $x_0=2$.

3. تقريب دالة قابلة للاشتقاق في النقطة بدالة تآلفية

تعريف: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة a

الدالة : $x\to f(a)+f'(a)(x-a)$ أو الدالة : $h\to f(a)+f'(a)h$ (حيث $h=x-a$)

تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة a

العدد : $f(a)+f'(a)h$ هو التقريب التآلفي للعدد : $f(a+h)$ بجوار الصفر

ونكتب : $f(a+h)\simeq f(a)+hf'(a)$

تمرين نعتبر $f(x)=\sqrt{x}$

1) حدد الدالة التألفية المماسة لدالة f في النقطة 1

2) استنتج قيمة مقربة لكل من $\sqrt{0,99}$ و $\sqrt{1,001}$

II. الاشتقاق على اليمين –الاشتقاق على اليسار

تمرين: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3+|x|$

1. أحسب $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين عند $x_0=0$)
2. أحسب $\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار عند $x_0=0$)
3. هل الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x_0=0$ ؟
4. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليمين عند $x_0=0$.
5. حدد معادلة لنصف مماس المنحنى الممثل للدالة f على اليسار عند $x_0=0$.
6. كيف نسمي النقطة $A(0,f(0))$ ؟

1. تعاريف

تعريف1: لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;\alpha[$

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في النقطة a و نرمز له بالرمز: $f'_d(a)$ ونكتب : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=$

يسمى العدد المشتق للدالة f على اليمين في النقطة a و نرمز له بالرمز: $f'_d(a)$ ونكتب : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$

تعريف2 : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $]\alpha;a]$

نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\prec a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$

يسمى العدد المشتق للدالة f على اليسار في النقطة a و نرمز له بالرمز : $f'_g(a)$

ونكتب : $\lim_{\substack{x\to a\\ x\prec a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$

خاصية لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I
f قابلة للاشتقاق على النقطة a تكافئ f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة a و f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة a و $f'_g(a)=f'_d(a)$

2. التأويل الهندسي– معادلة نصف مماس لمنحنى دالة

- إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على اليمين في نقطة a فان منحنى في الدالة f يقبل نصف مماس (T_d) عند لنقطة $A(a;f(a))$ معامله الموجه هو $f'_d(a)$ ومعادلته : $(T_d)\ y=f(a)+f'_d(a)(x-a)$
- إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق على اليسار في نقطة a فان منحنى في الدالة f يقبل نصف مماس (T_g) عند لنقطة $A(a;f(a))$ معامله الموجه هو $f'_g(a)$ ومعادلته : $(T_g)\ y=f(a)+f'_g(a)(x-a)$

III. الدالة المشتقة لدالة عددية

1. الاشتقاق على مجال

تعريف1: f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I إذا كانت f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I

تعريف2 : لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a;b]$ نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[a;b]$ إذا كانت f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a;b[$ و كانت f قابلة للاشتقاق على اليمين في a و قابلة للاشتقاق على اليسار في a

2. الدالة المشتقة

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $f'(x)$ و المعرفة كما يلي :
$$f':I\to\mathbb{R},\quad x\to f'(x)$$

تمرين: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$
2. حدد الدالة المشتقة للدالة f

تمرين: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sin x$

1. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على $\mathbb{R}$
2. حدد الدالة المشتقة للدالة f

3. الدالة المشتقة الثانية-المشتقات المتتالية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I

- إذا كانت الدالة المشتقة f' قابلة للاشتقاق على المجال I فان دالتها المشتقة على I تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f'' .
- إذا كانت f'' قابلة للاشتقاق على المجال I فان دالتها المشتقة على I تسمى الدالة المشتقة الثالثة للدالة f و نرمز لها بالرمز f''' أو $f^{(3)}$.

IV. جدول للدوال المشتقة لدوال اعتيادية و العمليات حول الدوال المشتقة

الدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=k$	$f'(x)=0$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=ax$	$f'(x)=a$
$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$ $\quad n\in\mathbb{Z}^*$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos(ax+b)$	$f'(x)=-a\sin(ax+b)$
$f(x)=\sin(ax+b)$	$f'(x)=a\cos(ax+b)$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

الدالة	الدالة المشتقة f'
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$
$f(x)=u+v$	$f'(x)=u'+v'$
$f(x)=u-v$	$f'(x)=u'-v'$
$f(x)=k.u$	$f'(x)=k.u'$
$f(x)=u\times v$	$f'(x)=u'\times v+u\times v'$
$f(x)=u^n$	$f'(x)=nu^n\times u'$
$f(x)=\frac{1}{u}$	$f'(x)=-\frac{u'}{u^2}$
$f(x)=\frac{u}{v}$	$f'(x)=\frac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$
$f(x)=\sqrt{u}$	$f'(x)=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

**** تمرين تطبيقي : (06 - س)**

V. تطبيقات الدالة المشتقة:

1. رتابة دالة وإشارة مشتقاتها

خاصية1: لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f تزايدية على مجال I فان $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$
- إذا كانت f تناقصية على مجال I فان $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$
- إذا كانت f ثابتة على مجال I فان $\forall x \in I \quad f'(x) = 0$

خاصية2: لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f' موجبة قطعا على المجال I فان f تزايدية قطعا على مجال I
- إذا كانت f' سالبة قطعا على المجال I فان f تناقصية قطعا على مجال I
- إذا كانت f' منعدمة على المجال I فان f ثابتة على مجال I

مثال: أدرس تغيرات الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 + 2x - 2$ و لخص النتائج في جدول

2. مطاريف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية1: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة a وتقبل مطرا فا في النقطة a فان $f'(a) = 0$

خاصية 2: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و a عنصرا من I

إذا كانت f' تنعدم في النقطة a تتغير إشارتها فان $f(a)$ مطرا فا للدالة f

تمرين: حدد مطاريف الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = x^2 - 3x + 1$

تمرين: نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x) = -x^2 + x$ مثال أخر : $f(x) = x^2 + 2x + 3$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
3. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
4. حدد جدول تغيرات الدالة f
5. حدد معادلة لمماس المنحني (C_f) الممثل للدالة f في النقطة A التي أفصولها $x_0 = 1$
6. حدد نقط تقاطع المنحني (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
7. حدد مطاريف الدالة f ادا وجدت
8. أرسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

VI. المعادلة التفاضلية:

تعريف: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

- المعادلة $y'' + \omega^2 y = 0$ ذات المجهول الدالة y حيث y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية.
- كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ وتحقق المتساوية : $f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$.

خاصية: ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم .

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y'' + \omega^2 y = 0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة كما يلي : $y : x \to \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$.

حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ و $\beta \in \mathbb{R}$

ملحوظة: حل المعادلة التفاضلية : $y'' + \omega^2 y = 0$ يعني تحديد الحل العام للمعادلة.

تمرين: حل معادلات التفاضلية التالية: $y'' + 16y = 0$